æ

KOLOKWIUM, Topologia I, 18.11.19, TEMAT B

UWAGA: Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnej kartce. Każda kartkę z rozwiązaniami podpisujemy podając: imię i nazwisko, numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej i nazwisko prowadzącego oraz temat kolokwium (A lub B). **Dla wszystkich odpowiedzi należy podać uzasadnienie.**

Zadanie 1. **A.** (15pkt). Niech d_k i d_r będą odpowiednio metrykami kolejową i rzeczną na płaszczyźnie R^2 i niech Q będzie zbiorem liczb wymiernych w R. Zdefiniujmy podzbiór $X \subset R^2$ wzorem

$$X \ = \ \{(x, y) \in R^2 \mid x \in Q, -1 < y < x < 1\}.$$

Czy punkt płaszczyzny $(1/\sqrt{3}, 0)$ należy do domknięcia X w topologiach generowanych przez każdą z tych metryk ? Znaleźć $\text{Int}X$ w obu topologiach.

B. (10pkt). Określmy rodzinę $\mathcal{T}$ podzbiorów prostej R formułą:

$$\mathcal{T} = \{A \cup (Q \setminus F) \mid A \subset (R \setminus Q) \text{ i F jest zbiorem skończonym}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Uzasadnić, że rodzina $\mathcal{T}$ definiuje topologię na prostej $\mathbf{R}$. Znaleźć domknięcie zbioru liczb niewymiernych w tej topologii i wykazać, że zbiór liczb naturalnych jest w niej gęsty.

Zadanie 2. **A.** (10pkt). Niech $f : R^2 \to R^2$ będzie funkcja zdefiniowana wzorem $f(x, y) = (x + y, x)$. Zbadać, czy funkcja f jest ciągła w punktach $(1, 0)$ i $(0, 1)$ w przypadku gdy w dziedzinie funkcji mamy topologię indukowaną przez metrykę kolejową a w przeciwdziedzinie metrykę rzeka.

B. (15pkt). Niech $f_1, f_2 : X \to Y$ będą dwoma odwzorowaniami ciągłymi przestrzeni topologicznej X w przestrzeń topologiczną Hausdorffa Y. Wykazać, że zbiór

$$A = \{x \in X \mid f_1(x) = f_2(x)\}$$

jest domknięty w X.

Zadanie 3. (25pkt). Niech A_1, A_2, A_3 będą następującymi podzbiorami płaszczyzny euklidesowej:

$A_1 = \{(1/n, 1/m) \mid m > n \ , \ n, m = 1, 2, ...\}$

$A_2 = A_1 \cup \{(1/n, 0) \mid n = 1, 2, ...\}$

$A_3 = A_2 \cup \{(x, y) \in R^2 \mid (-x, -y) \in A_2\}$

Czy istnieją indeksy j i k takie, że $j \neq k$ a przestrzeń A_j jest homeomorficzna z A_k ?

Zadanie 4. **A.** (10pkt). W kwadracie leksykograficznym znaleźć domknięcie zbioru $[1/2, 2/3) \times \{1\}$. Czy podzbiór $[1/2, 2/3] \times \{1\}$ kwadratu leksykograficznego jest zwarty?

B. (15pkt). Niech A i B będą zwartymi podzbiorami przestrzeni topologicznych Hausdorffa X i Y. Niech W będzie otoczeniem otwartym $A \times B$ w iloczynie kartezjańskim $X \times Y$. Udowodnić, że istnieją zbiory otwarte U w X i V w Y takie, że $A \times B \ \subset \ U \times V \ \subset \ W$.